



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C52. Extrema de $V \Leftrightarrow Z$ est réelle et extrême

$$(III) \Rightarrow V(z) = V^+ e^{-j\beta z} (1 + \rho e^{j(\psi + 2\beta z)})$$

Maximum de V : $\psi + 2\beta z_{\max} = -2\pi m \Rightarrow |V(z_{\max})| = V_{\max} = |V^+|(1 + \rho)$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} (1 - \rho e^{j(\psi + 2\beta z)}) \Rightarrow |I(z_{\max})| = I_{\min} = \frac{|V^+|}{Z_0} (1 - \rho)$$

$$\Rightarrow Z(z_{\max}) = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = S Z_0 \in \mathbb{R}$$

Minimum de V : $\psi + 2\beta z_{\min} = (2m + 1)\pi \Rightarrow |V(z_{\min})| = V_{\min} = |V^+|(1 - \rho)$

$$|I(z_{\min})| = |I|_{\max} = \frac{|V^+|}{Z_0} (1 + \rho)$$

$$\Rightarrow Z(z_{\min}) = Z_0 \frac{1 - \rho}{1 + \rho} = \frac{Z_0}{S} \in \mathbb{R}$$

C53. Exercice

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{70 + j100 - 50}{70 + j100 + 50} = \frac{1 + j5}{6 + j5} = 0.653 e^{j0.679}$$

$$S = (1 + \rho)/(1 - \rho) = 4.76$$

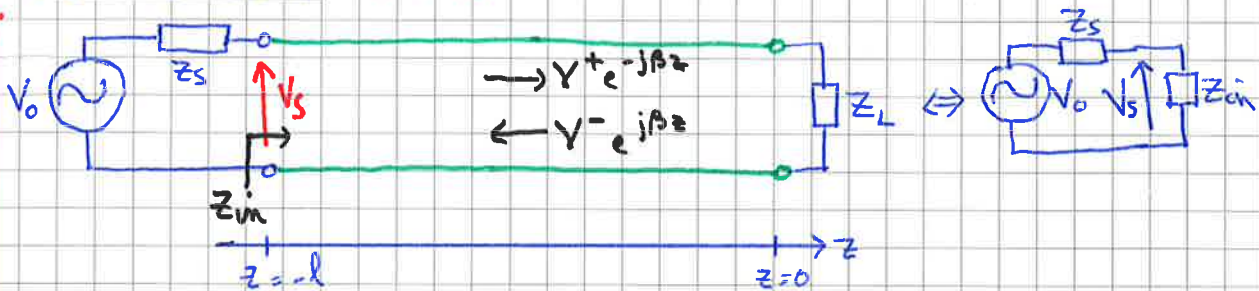
$$Z = 4.76 Z_0 = 238 \Omega \quad \text{à} \quad z_{\max} = -\frac{\psi}{2\beta} = -\frac{\psi}{4\pi} \lambda = -0.054 \lambda$$

$$Z = \frac{Z_0}{4.76} = 10.5 \Omega \quad \text{à} \quad z_{\min} = -\frac{\lambda}{4} - \frac{\psi}{2\beta} = (-0.054 - 0.25) \lambda = -0.304 \lambda$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

(vi) Calcul de V^+ (C54)



$$\text{II} \Rightarrow V_s = V(z=-l) = V^+ e^{j\beta l} (1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l}) \quad (1)$$

mais aussi $V_s = V_0 \frac{Z_{in}}{Z_s + Z_{in}} \quad (2)$

$$(1) = (2) \Rightarrow V^+ = \frac{Z_{in} V_0}{(Z_{in} + Z_s) e^{j\beta l} (1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l})}$$

Rq: Si $Z_{in} = 0$, $V^+ = 0$ $\rightarrow$ à éviter...

C55 - Exercice

$$f \rightarrow \lambda \rightarrow \frac{l}{\lambda} \rightarrow \beta l \rightarrow Z_{in} \rightarrow V^+ \rightarrow V(z) \rightarrow I(z)$$

$Z_L \rightarrow \Gamma_L$ $V(z,t)$ $I(z,t)$

$$* f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5\pi \cdot 10^7}{2\pi} = 25 \text{ MHz}$$

$$* \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{20 \text{ cm/ms}}{25 \text{ MHz}} = 8 \text{ nm} \Rightarrow \frac{l}{\lambda} = \frac{3}{8} = 0.375 \Rightarrow \beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{3\pi}{4}$$

$$* \tan \beta l = -1 \Rightarrow Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan \beta l}{Z_0 + j Z_L \tan \beta l} = 50 \frac{100 - 50j}{50 - 100j} = 40 + j30 \Omega$$

$$* \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3} \Rightarrow V^+ = \frac{10(40 + j30)}{(60 + j30) e^{j\frac{3\pi}{4}} (1 + \frac{1}{3} e^{-j\frac{3\pi}{2}})}$$

$$\Rightarrow V^+ = 7.07 e^{-j143^\circ} \text{ V}$$

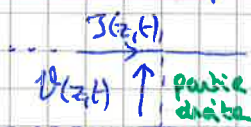


ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z) = 7.07 e^{-j143^\circ} e^{-j3\pi z/4} \left(1 + \frac{1}{3} e^{j3\pi z/2}\right) \text{ V} \\ I(z) = 0.141 e^{-j143^\circ} e^{-j3\pi z/4} \left(1 - \frac{1}{3} e^{j3\pi z/2}\right) \text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}(z,t) = \text{Re} \left\{ V(z) e^{j\omega t} \right\} = 7.07 \cos\left(5\pi 10^7 t - \frac{\pi z}{4} - 143^\circ\right) \\ \quad + 2.36 \cos\left(5\pi 10^7 t + \frac{\pi z}{4} - 143^\circ\right) \text{ V} \\ \mathcal{I}(z,t) = 0.141 \cos\left(5\pi 10^7 t - \frac{\pi z}{4} - 143^\circ\right) - 0.0471 \cos\left(5\pi 10^7 t + \frac{\pi z}{4} - 143^\circ\right) \text{ A} \end{cases}$$

d) Flux de puissance



$$P(z,t) = \mathcal{V}(z,t) \mathcal{I}(z,t)$$

puissance fournie
à la partie droite en t
= flux de puissance

$$\begin{aligned} \text{C56 } P_m(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{V}(z,t) \mathcal{I}(z,t) = \frac{1}{T} \int_0^T V_0(z) \cos(\omega t + \phi_V(z)) I_0(z) \cos(\omega t + \phi_I(z)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{V_0(z) I_0(z)}{2} \left[\cos(\phi_V - \phi_I) + \cos(2\omega t + \phi_I + \phi_V) \right] = \frac{V_0(z) I_0(z)}{2} \cos(\phi_V - \phi_I) \end{aligned}$$

(la moyenne d'un cos sur un nombre entier de période est nulle)

$$\Rightarrow P_m(z) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{phaseurs}}}{V} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{phaseurs}}}{I^*} \right\} \quad V = V_0(z) e^{j\phi_V(z)} \quad I = I_0(z) e^{j\phi_I(z)}$$

$$\text{Or } \begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \Gamma_L \frac{V^+}{Z_0} e^{j\beta z} \end{cases} \quad \text{pour une ligne de transmission}$$

onde directe (+) onde réfléchie (-)

$$\begin{aligned} P_m(z) &= P^+ + P^- = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{V^+ e^{-j\beta z}}{Z_0} (V^+)^* e^{+j\beta z} \right\} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{\Gamma_L V^+ e^{j\beta z}}{Z_0} (-\Gamma_L V^+ e^{j\beta z})^* \right\} \\ &= \frac{|V^+|^2}{2Z_0} - |\Gamma_L|^2 \frac{|V^+|^2}{2Z_0} \Rightarrow P_m = \langle P \rangle = \frac{|V^+|^2}{2Z_0} (1 - \rho^2) \end{aligned}$$

Rg: Pour un élément localisé $P_m = \frac{1}{2} \text{Re} \{ V I^* \} = P_{abs} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ Z |I|^2 \}$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

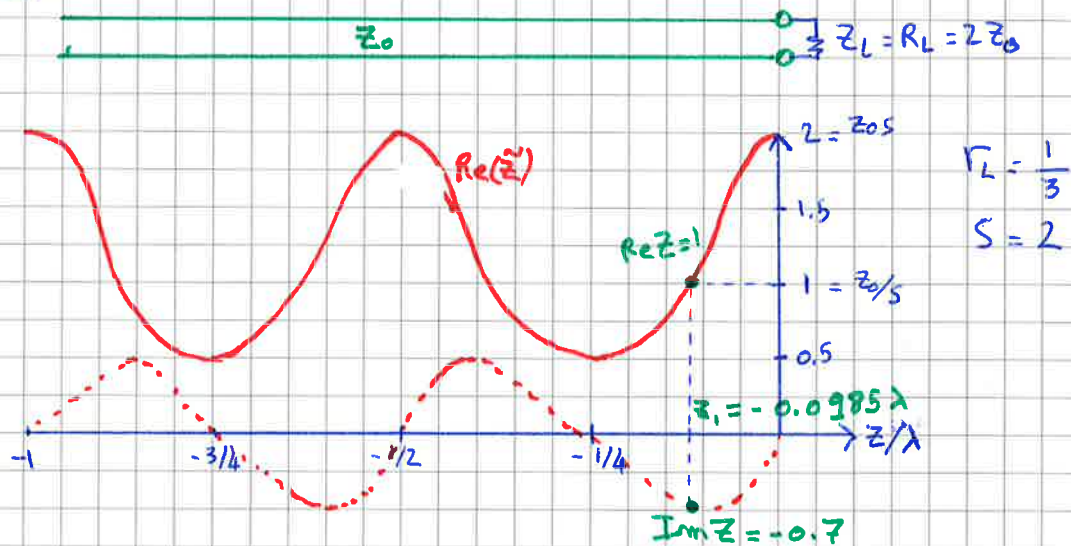
e) Adaptation d'impédance

$$\langle P \rangle = \frac{|V|^2}{2Z_0} (1 - \rho^2) \text{ est maximum quand } \rho = 0 = \Gamma \text{ (charge adaptée)}$$

⇒ on veut adapter les charges qui ne le sont pas.

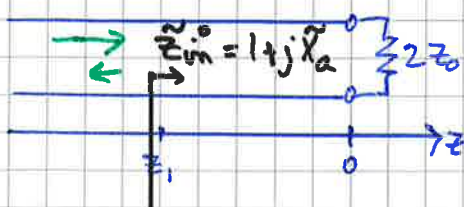
C57. Adaptation par utilisation d'éléments reactifs en série

exemple:



- ① Trouver z_1 tel que la partie réelle de $\tilde{Z}$ vaille 1. (calculer $\text{Im}(\tilde{Z}(z_1))$)
- ② Ajouter en cet endroit de la ligne un élément reactif en parallèle ou en série pour compenser $\text{Im}(\tilde{Z}(z_1))$.

ex: ici il faut $-jX_a = +0.7j$ en z_1 → une inductance



⇒

